TP n°2 : Systèmes linéaires et pivot de Gauss

Objectif : Programmer sous Python la méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire.

1 Systèmes linéaire et pivot de Gauss

Bien qu'il existe des outils génériques pour traiter la résolution de problèmes linéaires avec Python, on va s'intéresser à l'implémentation dans cet environnement de la méthode du pivot. Il s'agit d'éviter de recourir aux boites noires que constituent les fonctions préprogrammées et surtout de prendre en main Python et d'apprécier la simplicité de l'implémentation des opérations associées à la méthode.

Exercice 1 On s'intéresse au système de 5 équations linéaires à 7 inconnues $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 7}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr}
4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & + & 6x_6 & + & 7x_7 & = & 1\\
x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & & & - & 2x_7 & = & 2\\
x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & - & 5x_5 & + & 6x_6 & + & x_7 & = & -10\\
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & - & 3x_6 & - & x_7 & = & -2\\
x_1 & + & x_2 & + & & & 8x_4 & + & 2x_5 & + & 3x_6 & + & 4x_7 & = & 3
\end{array}\right.$$

1. Reformuler le problème sous la forme $Ax = b$.
2. Définir la matrice $M \in \mathcal{M}_{5,8}(\mathbb{R})$ obtenue par adjonction du vecteur colonne b à la matrice A, c'est-à-dire pour $1 \leqslant j \leqslant 7$ et $1 \leqslant i \leqslant 5$, $M_{ij} = A_{ij}$ et pour $1 \leqslant i \leqslant 5$, $M_{i8} = b_i$.

   C'est à la matrice M que l'on va appliquer la méthode du pivot de Gauss. On adopte alors la notation suivante :
   $$M = (L_1, \cdots, L_5)^T,$$
   où, pour $1 \leqslant i \leqslant 5$, L_i désigne le vecteur ligne associé à la i-ème ligne de M.

   Description de l'algorithme.

   (a) *Première itération du pivot.* Si $a_{11} \neq 0$,
   - $L_1 \leftarrow L_1/a_{11}$;
   - $L_i \leftarrow L_i - a_{i1}L_1$ pour $2 \leqslant i \leqslant 5$.

   (b) *Deuxième itération du pivot.* Si $a_{22} \neq 0$,
   - $L_2 \leftarrow L_2/a_{22}$;
   - $L_i \leftarrow L_i - a_{i2}L_2$ pour $3 \leqslant i \leqslant 5$.

   (c) etc.
3. **Définition d'une fonction `resoudreparpivot`.** Écrire une fonction Python qui généralise l'algorithme décrit. L'algorithme prend pour argument une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et renvoie une matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. Voici le prototype possible d'une telle fonction

```python
def resoudreparpivot(M):
    ... serie d'instructions ...
    ...
    ...
    return ...
```

4. Appliquer cette fonction à la matrice M définie précédemment.
5. Générer sous Python via la fonction `np.random.rand()` une matrice $Q \in \mathcal{M}_{20,30}(\mathbb{R})$, dont les valeurs sont toutes compris entre 0 et 1. Appliquer la méthode du pivot au système $Qx = d$ où $d \in \mathbb{R}^{20}$ vérifie $d_i = i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 20$ (on pourra utiliser les fonctions `np.arange()` et `np.reshape()`).

2 Interprétation vectorielle

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On notera L_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, les lignes de la matrice A, et on adoptera également la représentation suivante : $A = (V_1, \dots, V_n)$ où $1 \leqslant k \leqslant n$, V_k désigne les coordonnées du k-ème vecteur de A dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_p\}$ de $\mathbb{R}^p$. Lorsqu'on a choisi a_{jm} pour pivot, la méthode de Gauss consiste en la série de transformations suivantes , pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$:

1. si $i = j$:
$$L_i \leftarrow L_i / a_{im}$$
2. si $i \neq j$:
$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{im}}{a_{jm}} L_j$$

La matrice obtenue contient les coordonnées des $\{V_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ dans la base :

$$\mathcal{B}' = \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{j-1}, V_m, \epsilon_{j+1}, \cdots, \epsilon_p\}$$

de $\mathbb{R}^p$ dite *base voisine* de $\mathcal{B}$.

Exercice 2 **Définition d'une fonction `pivot`** Écrire une fonction Python `pivot` qui à une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ associe la matrice B, de mêmes dimensions, contenant les coordonnées des vecteurs V_k dans la base $\mathcal{B}' = \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{j-1}, V_m, \epsilon_{j+1}, \cdots, \epsilon_p\}$ de $\mathbb{R}^p$. Cette fonction est de la forme :

```
function pivot(A,j,m):
    ...
    return B
```

***Remarque** : il faut bien sûr s'assurer avant d'appliquer cette fonction que $\mathcal{B}'$ définit bien une nouvelle base de $\mathbb{R}^p$; ce qui n'a rien d'évident lorsqu'on considère une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.*

Exercice 3 Soit la matrice $A = (V_1, V_2, V_3, V_4)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer à l'aide de la fonction `np.linalg.matrix_rank()` le rang de cette matrice.
2. En utilisant la fonction `pivot`, calculer la matrice B des coordonnées des $\{V_k\}_{1 \leqslant k \leqslant 4}$. dans la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, V_3\}$.
3. Définir la matrice $P = (\epsilon_1, \epsilon_2, V_3)$, matrice de passage de la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ vers la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, V_3\}$.
4. Comparer A et $C = PB$. Conclusion.
5. Pourquoi ne peut-on faire entrer V_2 ou V_4 dans la base à la place de ϵ_3 ?

Exercice 4 Soit la matrice $A = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et D la matrice (V_1, V_2, V_3).

1. Calculer à l'aide de la fonction `np.linalg.matrix_rank()` le rang de la matrice D.
2. Considérons la matrice augmentée
$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
En utilisant la fonction `pivot` sur la matrice $\tilde{D}$, calculer l'inverse de la matrice D.

3. Soit maintenant la matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer $D^{-1}\tilde{A}$. Comment utiliser ce résultat pour résoudre le système linéaire suivant ?

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & - & 5\,x_4 & & & = & 5 \\ 2\,x_1 & + & 7\,x_2 & & & & & - & x_5 & = & -1 \\ -2\,x_1 & - & 4\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 2\,x_4 & - & x_5 & = & -2 \end{array} \right.$$

4. Reprendre les questions 1–3 avec la sous-matrice $D = (V_1, V_2, V_4)$. Qu'en déduisez-vous ?