TP n°3 : Résolution graphique en dimension 2

Objectif : Résoudre graphique les problèmes d'optimisation linéaire en dimension 2.

1 Résolution graphique d'un problème d'optimisation linéaire

Exercice 1 *Un premier exemple.* On s'intéresse au problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & Z(x,y) = 2x + y \\ \text{sous les contraintes} & x + 2y \leqslant 8 \\ & x + y \leqslant 5 \\ & 9x + 4y \leqslant 36 \\ & x, \; y \geqslant 0 \end{array}$$

1. Donner une solution de base admissible du problème considéré.
2. À l'aide de la fonction `plot` de la librairie `matplotlib`, représenter l'ensemble admissible du problème. Que peut-on en conclure quant à l'existence de solutions ?
3. Quels sont les sommets du polyèdre tracé dans la question précédente ?
4. À l'aide de la représentation avec `matplotlib` des lignes de niveaux de la fonction objectif Z, résoudre le problème.
5. Que se passe-t-il si l'on cherche à maximiser la fonction objectif $Z_2(x,y) = x + y$ sous les mêmes contraintes ?
6. On suppose, plus généralement, que la fonction objectif $Z_a(x,y) = ax + y$ dépend d'un paramètre a. Décrire la solution du problème d'optimisation linéaire associé

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & Z_a(x,y) = ax + y \\ \text{sous les contraintes} & x + 2y \leqslant 8 \\ & x + y \leqslant 5 \\ & 9x + 4y \leqslant 36 \\ & x, \; y \geqslant 0 \end{array}$$

   en fonction des valeurs du paramètre a.

Exercice 2 *Différentes situations en dimension 2.* On considère les trois problèmes suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & Z_1(x,y) = 2x + y \\ \text{sous les contraintes} & x + y \geqslant 4 \\ & x + 2y \leqslant 5 \\ & x \geqslant 2 \\ & x, \; y \geqslant 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & Z_2(x,y) = 2x - 3y \\ \text{sous les contraintes} & 3x + 2y \leqslant 6 \\ & x - 2y \geqslant 5 \\ & 2x - y \geqslant 6 \\ & x, \; y \geqslant 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & Z_3(x,y) = 30x + 20y \\ \text{sous les contraintes} & x - y \leqslant -2 \\ & x - 4y \leqslant -2 \\ & 2x + y \geqslant 5 \\ & 5x + 7y \leqslant 44 \\ & x, \; y \geqslant 0 \end{array}$$

Pour chacun des problèmes ci-dessus, traiter les questions suivantes :

1. Représenter à l'aide de `matlplotlib` le polyèdre des contraintes.
2. Tracer les lignes de niveaux de la fonction objectif.
3. Résoudre le problème d'optimisation linéaire.

2 Solutions de base et sommets d'un polyèdre dans $(\mathbb{R}^+)^2$

Dans cette seconde partie du TP, on va explorer le lien entre les sommets d'un polyèdre dans $(\mathbb{R}^+)^2$ et les solutions de base d'un certain système linéaire. Ces dernières seront obtenues en appliquant la méthode du pivot de Gauss-Jordan vue lors de la séance précédente.

Exercice 3 *Recherche algébrique de solutions de base.* Revenons au problème de l'**Exercice 1**.

1. Questions de cours
   - En introduisant les variables d'écart $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, écrire la formulation standard du problème.
   - Écrire le problème obtenu après introduction des variables d'écart sous forme matricielle $AX = b$, où $A \in \mathcal{M}_{3,6}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^3$.
   - Donner une solution de base du système des contraintes. Est-elle admissible ?
2. Exploration des solutions de base
   - Définir avec Python la matrice $M = (A, b)$. *C'est à cette matrice que l'on va appliquer la méthode du pivot de Gauss-Jordan.*
   - On pose
   $$V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\9\end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}, \qquad \epsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \epsilon_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \epsilon_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
   En utilisant la fonction `pivot`, définie dans le **TP 2**, calculer les coordonnées des vecteurs $V_1, V_2, V_3, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ dans les bases successives *dans cet ordre*
   $$\{V_2, \epsilon_2, \epsilon_3\},\ \{V_2, \epsilon_1, \epsilon_3\},\ \{V_2, \epsilon_1, \epsilon_2\},\ \{V_1, \epsilon_1, \epsilon_2\},\ \{V_1, \epsilon_1, \epsilon_3\},\ \{V_1, V_2, \epsilon_3\},\ \{V_1, V_2, \epsilon_2\},\ \{V_1, V_2, \epsilon_1\}.$$
   - Quelles sont les solutions de base associées à chacune de ces bases ?
3. Solutions de base admissibles et sommet du polyèdre des contraintes.
   - Parmi les solutions de base déterminées à la question précédente, lesquelles sont réalisables ?
   - Comparer avec les sommets du polyèdre des contraintes du problème d'optimisation linéaire considéré dans cet exercice. Que peut-on en déduire ?