TP n°6 : Méthode du simplexe pour les problèmes de deuxième espèce

Objectif : Dans cette séance, on s'intéressera à la résolution des problèmes de deuxième espèce, et en particulier à la recherche d'une solution de base admissible.

1 Vecteurs de prix marginaux

Exercice 1 On s'intéresse au problème d'optimisation linéaire $(\mathscr{P})$ suivant, écrit sous forme standard :

$$\begin{array}{lrl}
\text{Maximiser} & z = & x_1 + 2\,x_2 \\
\text{sous les contraintes} & & x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 1 \\
& & -2\,x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\
& & x_1 + 2\,x_2 + x_5 = 2 \\
& & x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4\,,\ x_5 \geqslant 0
\end{array}$$

1. Base réalisable.
   - Écrire ce problème sous forme matricielle

     $$\begin{array}{ll}
     \text{Maximiser} & {}^{t}c\,x \\
     \text{sous les contraintes} & A\,x = b \\
     & x \geqslant 0
     \end{array}$$

   - Montrer que γ donné par

     $$\gamma(1) = 1, \qquad \gamma(2) = 4 \qquad \text{et} \qquad \gamma(3) = 5$$

     définit une base pour ce problème.
2. Forme réduite relativement à une base.
   - Représenter en python le problème à l'aide d'une matrice augmentée. Justifier que le problème est sous forme réduite relativement à la base donnée par

     $$\gamma^0(1) = 3, \qquad \gamma^0(2) = 4 \qquad \text{et} \qquad \gamma^0(3) = 5$$

   - On souhaite faire entrer x_1 dans la base et en faire sortir x_3 pour écrire le problème sous forme réduite relativement à la base γ. Quel pivot doit-on choisir pour obtenir le résultat désiré ?
   - À l'aide de la fonction `pivot`, calculer la forme réduite relativement à la base γ de ce problème en réalisant le pivot déterminé à la question précédente sur la matrice augmentée.
   - En déduire la solution de base du système $A\,x = b$ associée à γ.
3. Vecteur des prix marginaux.
   - On pose

     $$B = A_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

     Calculer l'inverse de cette matrice à l'aide de la fonction `np.linalg.inv` (cf. TP 1).
   - Réaliser un changement de base dans les contraintes, en calculant $B^{-1}A$ et $B^{-1}b$.
   - Calculer le vecteur $d = {}^{t}(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ des prix marginaux associé à la base γ, défini par

     $${}^{t}d_B = (d_1, d_4, d_5) = (0, 0, 0) \qquad \text{et} \qquad {}^{t}d_N = (d_2, d_3) = {}^{t}c_N - {}^{t}c_B B^{-1} N$$

   - Comparer les résultats obtenus avec la forme réduite obtenue à la question précédente.

2 Recherche d'une solution de base admissible

Exercice 2 On s'intéresse au problème d'optimisation linéaire $(\mathscr{P})$ suivant, écrit sous forme canonique :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 2\,x_1 + 4\,x_2 \\ \text{sous les contraintes} & \begin{array}{rcr} -x_1 + 2\,x_2 & \leqslant & -2 \\ x_1 + 2\,x_2 & \leqslant & 10 \\ x_1\ ,\quad x_2 & \geqslant & 0 \end{array} \end{array}$$

1. Problème de deuxième espèce.
   - Pourquoi ce problème est-il de deuxième espèce ?
   - Mettre ce problème sous forme standard en introduisant les variables d'écart e_1 et e_2.
   - La base donnée par $\gamma(1) = 3$ et $\gamma(2) = 4$ est-elle réalisable ?
2. Problème auxiliaire. On considère le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & \qquad\qquad\qquad -x_5 \\ \text{sous les contraintes} & \begin{array}{rcr} -x_1 + 2\,x_2 + x_3 \qquad - x_5 & = & -2 \\ x_1 + 2\,x_2 \qquad + x_4 - x_5 & = & 10 \\ x_1\ ,\quad x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\ ,\ x_5 & \geqslant & 0 \end{array} \end{array}$$

   - Pour chacune des bases suivantes, calculer la solution de base associée :

$$\gamma_1(1) = 3, \quad \gamma_1(2) = 5 \qquad \text{et} \qquad \gamma_2(1) = 4, \quad \gamma_2(2) = 5$$

     En déduire une base réalisable pour le problème auxiliaire.
   - Représenter en python ce problème à l'aide d'une matrice augmentée.
   - Écrire ce problème sous forme réduite relativement à la base déterminée à la première question.
3. Résolution du problème auxiliaire.
   - Mettre en œuvre la méthode du simplexe pour résoudre le problème auxiliaire (cf. TP 5).
   - Quelle est la valeur atteinte par la fonction objectif du problème auxiliaire à l'optimum ? Que peut-on en déduire quant à l'existence d'une base réalisable pour le problème initial ?
   - En déduire une base réalisable pour le problème initial.
   - Écrire en python une fonction `extraction_base` qui permet, à partir d'un problème écrit sous forme réduite, de connaître la base associée.
4. Initialisation de la méthode du simplexe pour le problème initial.
   - Représenter en python le problème initial à l'aide d'une matrice augmentée.
   - Appliquer le pivot de Gauss pour écrire le problème sous forme réduite relativement à la base déterminée dans la question précédente.
   - Comparer les contraintes obtenues et celles obtenues à la dernière itération de la méthode du simplexe sur le problème auxiliaire.
   - Calculer le vecteur des prix marginaux associés à la base considérée dans cette question.
   - Comparer ce vecteur avec l'expression de la fonction objectif obtenue dans la forme réduite donnée plus haut.