TD 9 : Loi des grands nombres, Théorème Central Limite, Vecteurs gaussiens

Une étoile désigne un exercice important.

Exercice 1. Établir que pour toute fonction continue f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + x_2 \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n \quad \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad f\left(\frac{1}{2}\right), \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad f(p)\,, \quad p \in [0,1]\,. \tag{2}$$

Établir que pour toute fonction réelle continue et bornée f définie sur $\mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda)\,, \quad \lambda \in]0,+\infty[\,.$$

Exercice 2. Soit $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ une suite de variables aléatoires entières, indépendantes suivants la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. On pose

$$Y_n = \Pi_{k=1}^n (1 + X_k), \quad Z_n = \Pi_{k=1}^n X_k.$$

1. Etudier la convergence presque sûre de $\frac{1}{n} \log Y_n$.
2. Calculer $\mathbb{P}(Z_n \neq 0)$.
3. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0.
4. Etudier la convergence dans L^1 de Z_n.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_{2n+1} - X_{2n}$. Montrer que la suite

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)\,,$$

   converge en loi et trouver la loi limite.
2. On définit maintenant la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ par $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}$. La suite (Z_n) converge-t-elle ? En quel sens ? Préciser sa limite.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$? Que vaut $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n)$?
2. Utiliser le théorème central limite pour montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}\,.$$

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi, centrées, de variance σ^2, de fonction caractéristique Φ. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On définit aussi la suite $(N_k)_{k\geq 1}$ de v.a. indépendantes telle que pour tout k, N_k est une v.a. de Poisson de paramètre k. On suppose de plus que la suite (N_k) est indépendante de la suite (X_n). Pour tout $k \geq 1$, on pose

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{1}{\sqrt{N_k}} S_{N_k} \quad \text{si} \quad N_k \neq 0\,, \\ Z_k &= X_1 \quad \text{si} \quad N_k = 0\,. \end{aligned}$$

1. Exprimer la fonction caractéristique Φ_k de Z_k en fonction de Φ. Qu'advient-il si X_1 est une gaussienne ?
2. Montrer que pour tout réel t, $\Phi^n(t/\sqrt{n}) \to \exp(-\sigma^2 t^2/2)$, lorsque $n \to \infty$. En déduire que (Z_k) converge en loi vers une v.a. que l'on précisera.

⋆ **Exercice 6.** Soit $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ des v.a. i.i.d. de loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/3$, $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 2/3$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

1. Calculer la limite p.s. de la suite $V_n = \frac{(S_n/n)^{100} - (1/3)^{100}}{S_n/n - 1/3}$.
2. Calculer la limite en loi de $W_n = \sqrt{n}(S_n/n - 1/3)$ et donner $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}(S_n/n - 1/3) \leq 10\right)$ sous forme d'une intégrale.
3. Déduire de ce qui précéde la limite en loi de la suite de v.a. $\sqrt{n}\left((S_n/n)^{100} - (1/3)^{100}\right)$. Donner l'espérance et la variance de la loi limite.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. centrées ($\mathbb{E}[X_1] = 0$) réduites ($\mathrm{Var}(X_1) = 1$). On note $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Montrer que, pour tout fonction continue bornée f, $\mathbb{E}[f(Z_n)]$ converge quand $n \to \infty$.

   On souhaite maintenant généraliser cette convergence à d'autre types de fonctions.
2. (a) Montrer que, pour tout $r \in (0, 2)$ et $A > 0$, $\mathbb{E}[|Z_n|^r \mathbf{1}_{\{|Z_n|>A\}}] \leq \frac{r}{2-r} A^{-(2-r)}$.
   Indication : utiliser la formule $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)dt$ pour toute v.a. X positive.

   (b) En déduire que $\mathbb{E}[|Z_n|^r] \overset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}[|Z|^r]$ pour tout $r \in (0, 2)$, où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
   Indication : introduire la fonction $g_A(x) = \min(|x|, A)^r$.
3. On suppose désormais que $\mathbb{E}[|X_1|^3] < +\infty$. Soit f une fonction C^3, avec $\sup_{x\in\mathbb{R}} f^{(3)}(x) = K_3 < +\infty$. On va borner $\big|\mathbb{E}[f(Z_n)] - \mathbb{E}[f(Z)]\big|$ où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

   (a) Soit $(G_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$, indépendante de $(X_i)_{i\geq 1}$. On définit, pour $j \in \{0, \ldots, n\}$

   $$Z_{n,j} := \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(G_1 + \cdots + G_j + X_{j+1} + \cdots + X_n\Big)\,.$$

   Identifier $Z_{n,0}$, et donner la loi de $Z_{n,n}$.

   (b) En définissant $S_{n,j} := \frac{1}{\sqrt{n}}\big(G_1 + \cdots + G_j + X_{j+2} + \cdots + X_n\big)$, montrer que

   $$\Big|f(Z_{n,j}) - f(S_{n,j}) - f'(S_{n,j})\frac{X_{j+1}}{\sqrt{n}} - f''(S_{n,j})\frac{X_{j+1}^2}{2n}\Big| \leq K_3 \frac{|X_{j+1}|^3}{6n^{3/2}}$$
   $$\Big|f(Z_{n,j+1}) - f(S_{n,j}) - f'(S_{n,j})\frac{G_{j+1}}{\sqrt{n}} - f''(S_{n,j})\frac{G_{j+1}^2}{2n}\Big| \leq K_3 \frac{|G_{j+1}|^3}{6n^{3/2}}$$

   et en déduire

   $$\Big|\mathbb{E}\big[f(Z_{n,j}) - f(Z_{n,j+1})\big]\Big| \leq \frac{K_3}{6n^{3/2}}\Big(\mathbb{E}[|Z|^3] + \mathbb{E}[|X_1|^3]\Big).$$

(c) Montrer que

$$\Big| \mathbb{E}[f(Z_n)] - \mathbb{E}[f(Z)] \Big| \leq \frac{K_3}{6n^{1/2}} \Big(\mathbb{E}[|Z|^3] + \mathbb{E}[|X_1|^3] \Big) \overset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

On peut voir cela comme une forme faible du théorème de Berry-Esseen.

Exercice 8. Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré, avec $E(X^2) = 4$ et $E(Y^2) = 1$, et tel que les variables $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

1. Déterminer la matrice de covariance de (X, Y).
2. Montrer que le vecteur $(X + Y, 2X - Y)$ est également gaussien, puis déterminer sa matrice de covariance.

Exercice 9. Soit $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur gaussien. On pose $U = X + Y + Z$ et $V = X - Y$.

1. Montrer que $(U, V) \in \mathbb{R}^2$ est gaussien.
2. A quelle condition sur la matrice de covariance de (X, Y, Z) les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 10. Soit $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur gaussien d'espérance $(1, 1, 1)^t$ et de matrice de covariance $2I_3$. Le vecteur $(X + 2Y + Z, 2X - Y + Z + 2)$ est-il gaussien ? Déterminer sa loi.

Exercice 11. Soit $X \in \mathbb{R}^3$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. X possède-t-il une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$? Si oui donner son expression.
2. Trouver un opérateur linéaire $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que les composantes du vecteur $A \cdot X$ soient des variables indépendantes.
3. Déterminer la loi de $X_1 + 2X_2 - X_3$ où $X = (X_1, X_2, X_3)$.

Exercice 12. Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, I_n)$.

1. Déterminer la loi de X_1^2.
2. Déterminer les lois de $(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)$ et de $\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}$.
3. Soit Y une v.a. telle que $(X_1, \cdots, X_n, Y)$ soit un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^{n+1}$ de loi $\mathcal{N}(0, I_{n+1})$. Déterminer la loi de la variable

$$\frac{Y}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}}.$$

Exercice 13. Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire gaussien, centré, réduit, $\mathcal{N}(0, I_n)$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on pose $Y_i = X_1 + \cdots + X_i - X_{i+1}$ (avec la convention $X_{n+1} = 0$). Les v.a. $Y_1, \cdots, Y_n$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 14. Existe t-il un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice de covariance est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} ?$$