

Rapport Projet 3A

Modèle à volatilité incertaine et méthode primale pour les BSDEs

Chenlin GU et Jingke XU
Tuteur : Pierre Henry-Labordère

mars 2017

Table des Matières

1	Introduction	2
2	Contrôle stochastique, EDP	3
2.1	Contrôle et optimisation stochastique	3
2.2	Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman	4
2.3	Méthode des différences finies	5
3	Méthodes d'équations différentielles stochastiques rétrogrades	5
3.1	1-BSDE	6
3.2	2-BSDE	7
3.3	Régression empirique	8
3.4	Méthode primale : de backward à forward	9
3.5	Méthode duale	9
3.6	Exemples numériques	10
3.6.1	1-BSDE	10
3.6.2	2-BSDE : modèle à la volatilité incertaine	14
4	Processus de branchement	18
4.1	Processus de branchement	18
4.2	Processus de branchement indiqué	20
4.3	Exemples numériques	21
5	Conclusion	22

1 Introduction

Résoudre le problème de contrôle stochastique est enjeu important dans le domaine de mathématiques appliquées, notamment en mathématiques financière. En cas ou la volatilité n'est pas connue, l'EDP linéaire de Black-Scholes est remplacée par une EDP non-linéaire. La résolution de cette EDP en grande dimension nécessite des méthodes probabilistes comme les équations stochastiques rétrogrades (BSDEs). L'objectif de notre projet 3A est de comprendre la représentation de probabiliste des équations Hamilton-Jacobi-Bellman par des BSDEs, et implémenter de schéma numérique primale et dual pour un modèle à volatilité incertaine. De plus, on a aussi étudié la solution de l'EDP semi-linéaire via le processus de branchement.

Voici le plan de notre rapport :

- Dans section 2, on introduit les connaissances fondamentales du contrôle stochastique. Beaucoup d'EDPs non-linéaires en finance sont de type de HJB. L'approche numérique classique de la méthode des différences finies (programmation dynamique), mais qui demande une complexité très coûteuse en grande dimension.
- Dans section 3, on présente tout d'abord premier ordre BSDEs (1-BSDEs), qui proposent une représentation probabiliste de solutions des EDPs paraboliques non-linéaires, en généralisant la formule de Feynman-Kac. Cependant, les EDPs correspondantes ne peuvent pas être non-linéaires dans la dérivée du second ordre et sont donc reliées à des équations HJB sans contrôle sur le terme de diffusion. Pour régler ce problème dans le modèle à volatilité incertaine, on introduit une nouvelle classe des BSDEs, second ordre BSDEs (2-BSDEs). A côté de schéma numérique, on propose deux solutions biaisées : la méthode primale (sous-estimateur), et la méthode duale (sur-estimateur).
- Dans section 4, on étudie un autre type des EDPs : EDP semi-linéaire, et la solution via le processus de branchement, et sa généralisation : processus de branchement indiqué.

On présente les résultats des exemples numériques à la fin de chaque section.

2 Contrôle stochastique, EDP

Dans cette section, on suit le chemin dans [H.07] et introduit la partie théorique du problème de contrôle, de l'équation de HJB et de BSDE.

2.1 Contrôle et optimisation stochastique

Un problème standard du contrôle stochastique est composé par trois parties: **l'état du système, le contrôle et la performance.**

L'état du système est une dynamique qui contient toutes les variables quantitatives. Il consiste d'une partie déterministe et une autre partie stochastique et il quelques-fois intervient avec le contrôle, donc on l'écrit souvent comme un processus d'Itô ou EDS si les paramètres ne sont pas constantes:

$$\begin{aligned}dX_s^{t,x} &= b(X_s^{t,x}, \alpha_s)ds + \sigma(X_s^{t,x}, \alpha_s)dW_s \\ X_t^{t,x} &= x\end{aligned}$$

où X_t, W_t et α_t signifie séparément l'état, les facteurs stochastiques et le contrôle. On remarque que le factor stochastique est généralement traité comme un mouvement brownien, qui représente une fluctuation aléatoire et apparaît partout dans la nature et dans le monde de finance. En plus, chaque composant de facteur aléatoire peut être dépendant et caractérisé par la covariance quadratique

$$\langle dW_s^i, dW_s^j \rangle = \rho_s^{ij}$$

La dynamique α_t est influencé par un contrôle désigné par nous en fonction de toutes les informations disponibles jusqu'à l'instant t , donc c'est un processus \mathcal{F}_t - adapté. La valeur permise pour le contrôle est dite l'espace de contrôle $\mathcal{A}(t, x)$ qui peut aussi varier par rapport le temps et l'état.

$$\alpha_t \in \mathcal{A}(t, x)$$

Finalement, l'objet du problème de contrôle ou d'optimisation vise à minimiser une fonction objective $J(t, x, \alpha)$, où t, x représente le temps et l'état initial. Généralement, il a une version en horizon fini $T < \infty$

$$J(t, x, \alpha) = \mathbb{E} \left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + g(X_T^{t,x}, \alpha_T) \right] \quad (1)$$

et une version en horizon infini, qui prend en compte que l'état pendant le processus car il n'y a plus l'état final

$$J(t, x, \alpha) = \mathbb{E} \left[\int_t^\infty f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds \right] \quad (2)$$

En économie, la fonction du coût s'interprète l'utilité. Pour la suite, on se concentre dans l'équation 1 et on note la valeur maximale d'une fonction objective parmi les contrôles permis

$$u(t, x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x, \alpha)$$

2.2 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Une stratégie de traiter le problème de contrôle est la programmation dynamique, qui commence par juste avant la dernière étape afin de trouver la stratégie optimale. Puis, on répète cette procédure et utilise les stratégies déjà connues de chercher celles à partir d'une étape plus avant. L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) est sa version infinitésimale.

On développe cette fonction en temps $t + h$ et alors

$$u(t, x) \geq \mathbb{E} \left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + u(t+h, X_{t+h}^{t,x}) \right]$$

En utilisant la formule d'Itô en cas la fonction est régulière et de croissance pas trop rapide:

$$u(t+h, X_{t+h}^{t,x}) = u(t, x) + \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}^\alpha u \right)(s, X_s^{t,x}) ds + \text{martingale locale}$$

On plonge ce terme et obtien

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} [\mathcal{L}^\alpha u(t, x) + f(t, x, \alpha)] \leq 0$$

En fait, quand on prend la stratégie optimale, l'identité est atteinte. Alors cette fonction suit l'équation d'HJB

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} [\mathcal{L}^\alpha u(t, x) + f(t, x, \alpha)] &= 0 \\ u(T, x) &= g(x) \end{aligned}$$

A l'autre côté, le théorème de vérification nous assure l'existence de la solution de l'équation sous certaines conditions de régularité et cette solution optimise aussi la performance. Donc, pour étudier un problème d'optimisation, il suffit d'étudier son équation de HJB d'abord. En réalité, après la discrétisations, l'équation de HJB revient à la programmation dynamique, qui sera présentée dans la sous-section prochaine.

2.3 Méthode des différences finies

Pour résoudre l'équation de HJB numériquement, on présente le schéma d'Euler rétrograde (programmation dynamique)[G.05].

Par exemple, en dimension 1, on définit $\Delta t = T/N, t_n = n\Delta t, u_j^n = u(t_n, x_j)$, où $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une suite dans l'espace de X avec $x_{j+1} - x_j = \Delta x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n-1} - u_j^n}{\Delta t} &= \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left[\frac{(\sigma^\alpha)^2}{2} \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} + b^\alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + f(t_n, x_j, \alpha) \right] \\ u_j^N &= g(x_j) \end{aligned}$$

Attention : il faut bien respecter la condition CFL afin d'éviter l'explosion. C'est-à-dire

$$\sigma^2 \Delta t \leq (\Delta x)^2$$

3 Méthodes d'équations différentielles stochastiques rétrogrades

Dans cette sous-section, on introduit l'équation différentielles stochastiques rétrogrades, qui est d'une part non-trivial dans maths, d'autre part une méthode généralisant la formule Feynman-Kac et nous propose une manière probabiliste de résoudre l'équation de HJB.

On révisé l'équation déterministe

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

il n'y pas de différence de résoudre le système dans le sens rétrogrades si l'on applique l'inverse du temps et f satisfait la condition Cauchy-Lipschitz.

En revanche, pour l'équation stochastique, une intégration

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f(s, Y_s) ds + \int_t^T Z_s dW_s$$

n'est pas une solution de l'équation

$$dY_t = f(t, Y_t) dt + Z_t dW_t$$

à priori car on sait pas si Y_t est adaptée. Donc, on a besoin de justifier la solution BSDE.

Pour la suite, on va introduire 1-BSDE d'abord puis sa version généralisée 2-BSDE. En concernant la solution numérique, on présentera ensuite la méthode de Monte-Carlo et la régression empirique. Cependant, on va voir la solution numérique est généralement un estimateur sous-optimal et afin d'obtenir un sur-estimateur, on applique la méthode dual, qui sera incluse à la fin de cette section.

3.1 1-BSDE

On donne d'abord la définition de BSDE

Définition 1 (1-BSDE) Une solution de 1-BSDE est un couple (Y, Z) de (\mathcal{F}_t) -adaptée Itô processus qui prend sa valeur dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et satisfait

$$\begin{aligned} dY_t &= -f(t, X_t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t \\ Y_T &= g(X_T) \\ dX_t &= b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \end{aligned}$$

L'équation signifie que

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s$$

La fonction déterministe f est dit **générateur**. On souligne que le terme de diffusion Z est une partie de la solutions.

Le théorème suivant sur l'existence et l'unicité de BSDE, démontré en premier dans [PP90], est impressionnant

Théorème 1 [PP90] On suppose que $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui satisfait la condition Cauchy-Lipschitz

$$|f(t, x, y_1, z_1) - f(t, x, y_2, z_2)| \leq K(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$$

et $f(\cdot, \cdot, 0, 0) \in \mathbb{H}^2$ et $g \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$, alors il existe unique solution adaptée (Y, Z) de définition 1.

En utilisant ce théorème, on généralise la formule de Feynman-Kac

Proposition 1 La solution de l'équation 1 est donné par $\{(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}), t \leq s \leq T\} = \{(u(s, X_s^{t,x}), D_x u(s, X_s^{t,x})' \sigma(s, X_s^{t,x})), t \leq s \leq T\}$, où la fonction u satisfait

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}u - f(t, x, u, (D_x u)' \sigma(x)) &= 0 \\ u(T, x) &= g(x) \end{aligned}$$

Si l'équation au-dessus associé à BSDE a unicité, on peut aussi utiliser la solution de BSDE de représenter la solution de cette équation. Ce nous permet de résoudre l'équation de HJB, qui contient un terme non-linéaire. On va montrer cette idée par un exemple concret dans la section suivante.

Discrétisation de 1-BSDE

En concernant le schéma numérique, on discrétise l'intervalle $[0, T]$ en utilisant $h = T/n$ et $t_i = \frac{iT}{n}$, puis le processus $X_{t_i}^h$ est simulé par le schéma d'Euler en pas discret. Alors l'intégrale stochastique s'écrit

$$Y_{t_i}^h - Y_{t_{i-1}}^h = f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^h, Y_{t_{i-1}}^h, Z_{t_{i-1}}^h) \Delta t_i + Z_{t_{i-1}}^h \Delta W_{t_i}$$

Si l'on prend l'espérance conditionnelle, l'intégrale stochastique s'annule. D'après la même technique, on le fois par ΔW_{t_i} et puis applique l'espérance conditionnelle, le terme dt disparaît. Donc, on propose le schéma comme suivant.

$$\begin{aligned} Y_{t_n}^h &= g(X_{t_n}^h) \\ Y_{t_{i-1}}^h &= \mathbb{E}_{i-1}[Y_{t_i}^h + f(t_i, X_{t_i}^h, Y_{t_i}^h, Z_{t_i}^h)\Delta t_i] \\ Z_{t_{i-1}}^h &= \frac{1}{\Delta t_i} \mathbb{E}_{i-1}[Y_{t_i}^h \Delta W_{t_i}] \end{aligned}$$

Une question naturelle est comment implémenter l'espérance conditionnelle dans l'approche numérique. Grosso modo, l'espérance conditionnelle réalise une approximation optimale dans sous-espace, qui nous inspire d'utiliser la régression. Une stratégie de régression empirique sera présenté dans la section suivante.

3.2 2-BSDE

Dans 1-BSDE, les dérivés de second ordre sont linéaires. Maintenant, on introduit 2-BSDE (BSDE de second ordre) [GJ13] pour l'EDP correspondante qui peut être non-linéaire en dérivés de second ordre, et donc connecté à l'équation HJB avec un contrôle sur les coefficients de diffusion.

Définition 2 (2-BSDE) Soit $(Y_t, Z_t, \Gamma_t, \alpha_t)_{t \in [0, T]}$ un quadruple de processus (\mathcal{F}_t) -adapté à valeurs dans \mathbb{R} , \mathbb{R}^d , \mathcal{S}^d , et \mathbb{R}^d . On appelle (Y, Z, Γ, α) une solution de 2-BSDE (Markovien) si

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ dY_t &= -f(t, X_t, Y_t, Z_t, \Gamma_t)dt + Z_t \diamond dW_t \\ dZ_t &= \alpha_t dt + \Gamma_t \sigma(t, X_t)dW_t \\ Y_T &= g(X_T) \end{aligned}$$

D'où \diamond désigne l'intégrale de Stratonovich. L'utilisation du produit Stratonovich est uniquement pour des raisons de convenance et peut être remplacée par une intégrale d'Itô

$$dY_t = (-f(t, X_t, Y_t, Z_t, \Gamma_t) + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(t, X_t)\sigma(t, X_t)'\Gamma_t))dt + Z_t dW_t$$

On considère l'EDP parabolique entièrement non linéaire

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + f(t, x, u, D_x u, D_x^2 u) &= 0 \\ u(T, x) &= g(x) \end{aligned}$$

Une application directe de la formule d'Itô donne le résultat suivant :

Proposition 2 (Extension de Feynman-Kac) Soit u une fonction régulière (assez régulière pour appliquer la formule d'Itô) qui satisfait l'EDP au-dessus. Alors $(Y_t = u(t, X_t), Z_t = D_x u(t, X_t), \Gamma_t = D_x^2 u(t, X_t), \alpha_t = (\partial_t + \mathcal{L})D_x u(t, X_t))$ est une solution de 2-BSDE, où \mathcal{L} est le générateur Itô de X .

Discrétisation de 2-BSDE

Procéder comme 1-BSDE, on obtient le suivant schéma de discrétisation (implicite) pour 2-BSDE :

$$\begin{aligned}
Y_{t_{i-1}}^h &= \mathbb{E}_{i-1}[Y_{t_i}^h] + \left(f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^h, Y_{t_{i-1}}^h, Z_{t_{i-1}}^h, \Gamma_{t_{i-1}}^h) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^h) \sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^h)' \Gamma_{t_{i-1}}^h] \right) \Delta t_i \\
Z_{t_{i-1}}^h &= \frac{1}{\Delta t_i} \sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^h)'^{-1} \mathbb{E}_{i-1}[Y_{t_i}^h \Delta W_{t_i}] \\
\Gamma_{t_{i-1}}^h &= \frac{1}{\Delta t_i} \mathbb{E}_{i-1}[Z_{t_i}^h \Delta W_{t_i}'] \sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^h)^{-1} \\
Y_{t_n}^h &= g(X_{t_n}^h) \\
Z_{t_n}^h &= Dg(X_{t_n}^h)
\end{aligned}$$

3.3 Régression empirique

Avant d'attaquer la solution numérique de BSDEs, on introduit régression empirique[E.13], une technique très utile, pour calculer l'espérance conditionnelle dans la programmation dynamique.

Définition 3 (Fonction espérance conditionnelle (fonction de régression))

Considérons deux variables aléatoires O et R , la première à valeurs dans \mathbb{R}^d , la seconde dans \mathbb{R} . Nous supposons que R est de carré intégrable et nous notons $\mathfrak{M}(\cdot)$ la fonction de régression définie par

$$\mathbb{E}(R|O) = \mathfrak{M}(O) \quad p.s.$$

Etant donné un échantillon $(O^{(m)}, R^{(m)})_{1 \leq m \leq M}$, une procédure de régression empirique vise à produire une fonction $\widetilde{\mathfrak{M}}_M(\cdot)$ - construite à partir de l'échantillon - qui approche (dans un certain sens) la fonction de régression $\mathfrak{M}_M(\cdot)$ inconnue.

Il existe de nombreuses méthodes de régression empirique, ici on concentre sur la méthode des moindres carrés empiriques linéaires, consistant à calculer $\widetilde{\mathfrak{M}}_M(\cdot)$ sur un sous-espace vectoriel de dimension finie Φ , engendré par K fonctions de base $\{\phi_k(\cdot) : 1 \leq k \leq K\}$:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \text{Vect.}(\phi_1, \dots, \phi_K) \\
&= \{ \varphi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R} \quad t.q. \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^K \quad \text{et} \quad \varphi(\cdot) := \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_k(\cdot) := \alpha \cdot \phi(\cdot) \}
\end{aligned}$$

On a deux remarques immédiates : plus K et l'espace Φ seront grands, meilleure sera l'approximation ; plus l'échantillon M sera important, meilleure sera l'estimation des coefficients dans Φ . Dans la suite, on suppose toujours $M \geq K$ de sorte à éviter les problèmes de sur-paramétrisation.

Puisque $\mathfrak{M}(O)$ minimise

$$\mathbb{E}[(R - \mathfrak{M}_O)^2] = \mathbb{E}[(R - \mathbb{E}(R|O))^2] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}(R|O) - \mathfrak{M}_O)^2]$$

sur toutes les variables aléatoires \mathfrak{M}_O de carré intégrable et $\sigma(O)$ -mesurable. Il est naturel de prendre pour $\widetilde{\mathfrak{M}}_M(\cdot)$ la fonction $\varphi \in \Phi$ minimise le critère quadratique empirique

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M [R^{(m)} - \varphi(O^{(m)})]^2$$

En fait, cela revient à choisir les coefficients sur la base égaux à

$$\alpha^M := \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^K} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M [R^{(m)} - \alpha \cdot \phi(O^{(m)})]^2$$

puis de poser

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_M(\cdot) = \alpha^M \cdot \phi(\cdot)$$

3.4 Méthode primale : de backward à forward

Appliquer l'algorithme backward en utilisant la technique de régression empirique. On obtient déjà un estimateur de $Y_0 = u(0, X_0)$. Néanmoins, on ne sait pas c'est un sur-estimateur ou sous-estimateur. En particulier, dans le cas de contrôle stochastique, par exemple $u(t, x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x, \alpha)$, on peut construire un sous-estimateur en faisant les suivants :

1. Simuler M_1 copies de \hat{X} avec une diffusion fixée.
2. Appliquer l'algorithme backward en utilisant régression empirique, en même temps, on obtient les estimateurs $\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{\Gamma}$, etc.
3. Simuler M_2 copies indépendantes de X^{α^*} en choisissant le contrôle sous-optimal α^* . On obtient le sous-estimateur

$$u_0^{LS} = \frac{1}{M_2} \sum_{m=1}^{M_2} Y_T^{h, m}$$

3.5 Méthode duale

Dans la section précédente, on a parlé de la méthode primale et de backward à forward, qui réalise un sous-optimal estimateur, qui ne suffit pas dans quelque situation pratique et on veut en plus connaître sa borne supérieure. Dans cette section, on propose un autre sur-estimateur qui s'appelle la méthode dual introduit dans [HLLR16].

On rappelle le problème d'optimisation.

$$u(t, x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_t^T f(s, X_s^{t, x}, \alpha_s) ds + g(X_T^{t, x}, \alpha_T) \right] \quad (3)$$

On propose une autre intégrale

$$\begin{aligned}\Phi^{\alpha,\varphi}(t,x) &= g(X_T^{t,x}, \alpha_T) + \int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds - \int_t^T \varphi_s(X_s^{t,x}, \alpha_s) \sigma(s, \alpha_s, X_s^{t,x}) dW_s \\ v^h(t,x) &= \inf_{\varphi \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}^h} \Phi^{\alpha,\varphi} \right]\end{aligned}$$

Où \mathcal{U} est un espace de fonction bornée et adaptée et \mathcal{A}^h est l'espace admissible discret. La conclusion est que

$$u(t,x) = \liminf_{h \rightarrow 0} v^h(t,x)$$

On donne une justification courte en utilisant que la fait que l'intégration stochastique par rapport une fonction bornée est une martingale.

$$\begin{aligned}u(t,x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\alpha \in \mathcal{A}^h} \mathbb{E}[\Phi^{\alpha,\varphi}(t,x)] \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}[\max_{\alpha \in \mathcal{A}^h} \Phi^{\alpha,\varphi}(t,x)] \\ &\Rightarrow u(t,x) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} v^h(t,x)\end{aligned}$$

Donc, c'est effectivement un sur-optimal estimateur. D'ailleurs, une remarque importante est que $\phi^* = \partial_x u$ réalise le minimum.

3.6 Exemples numériques

Dans cette sous-section, on utilise quelques exemples d'illustrer l'avantages de différente méthodes.

3.6.1 1-BSDE

Le premier exemple, on s'intéresse à résoudre le problème de contrôle stochastique

$$u_0 = u(t,x) = \sup_{\lambda_s \in [0,\beta]} \mathbb{E}[e^{-\int_t^T \lambda_s ds} g(X_T^{t,x})]$$

où $\{X_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$ est la solution de l'EDS

$$\begin{aligned}dX_s &= \sigma X_s dW_s, & t \leq s \leq T \\ X_t &= x\end{aligned}$$

L'équation de HJB associée s'écrit naturellement

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta(-u)^+ &= 0 \\ u(T,x) &= g(x)\end{aligned}$$

On a aussi la représentation de 1-BSDE

$$\begin{aligned} dY_s &= -\beta(-Y_s)^+ ds + Z_s dW_s \\ Y_T &= g(X_T) \end{aligned}$$

Le schéma numérique s'écrit

Discrétisation. On désigne $\Delta t = (T-t)/N$, $t_i = t + i\Delta t$, $\Delta W_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$, $i = 0, \dots, N$.

On considère encore le schéma d'Euler rétrograde

$$\begin{aligned} Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}} &= -\beta(-Y_{t_{i-1}})^+ \Delta t + Z_{t_{i-1}} \Delta W_{t_i} \\ Y_{t_N} &= g(X_{t_N}) \end{aligned}$$

On donne \mathcal{F}_s la filtration naturelle du processus $(X_s)_{t \leq s \leq T}$. En général, il n'y pas de variables aléatoires $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable $Y_{t_{i-1}}$, $Z_{t_{i-1}}$ qui satisfont l'équation au-dessus. Par conséquent, on considère un schéma implicite en prenant l'espérance sous $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ sur les deux côtés d'équation [GJ13]

$$Y_{t_{i-1}} = \mathbb{E}_{t_{i-1}}[Y_{t_i} + \beta(-Y_{t_i})^+ \Delta t]$$

Grâce à la technique de régression empirique introduit dans la Section 3.3, on a une solution par simulation backward

Algorithm 1: Simulation Backward (1-BSDE)

Input: M, N, Φ : nombre de simulation, nombre de discrétisation, espace de bases de régression

Output: coefficients de régression $(\hat{\alpha}^{(n)})_{0 \leq n \leq N-1}$

```

1 for  $m$  from 1 to  $M$  do
2   Simulation de  $X_{t_i}^m$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ 
3    $Y_{t_N}^m = g(X_{t_N}^m)$ 
4 for  $n$  from  $N - 1$  to 0 do
5    $R_{t_{n+1}} = Y_{t_{n+1}} + \beta(-Y_{t_{n+1}})^+ \Delta t$ 
6    $\hat{\alpha}^{(n)} := \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^K} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M [R_{t_{n+1}}^m - \alpha \cdot \phi^{(n)}(X_{t_n}^m)]^2$ 
7    $Y_{t_n}^m = \hat{\alpha}^{(n)} \cdot \phi^{(n)}(X_{t_n}^m)$ 
8 return  $(\hat{\alpha}^{(n)})_{0 \leq n \leq N-1}$ 

```

Donc on obtient l'estimateur $u_0^{BSDE} = \hat{Y}_t = \hat{\alpha}^{(0)} \cdot \phi^{(0)}(X_t)$.

Sous-estimateur

En fait, une fois que l'on a les coefficients $(\hat{\alpha}^{(n)})_{0 \leq n \leq N-1}$, on peut poser $\hat{Y}_{t_n} = \hat{\alpha}^{(n)} \cdot \phi^{(n)}(X_{t_n})$ pour $0 \leq n \leq N - 1$. Et puis, on obtient un (sous-optimal) estimation de contrôles $(\hat{\lambda}^*)$

$$\hat{\lambda}_{t_n}^m = \beta 1_{\{\hat{Y}_{t_n}^m < 0\}}, \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N - 1.$$

En faisant une deuxième simulation indépendante (forward) avec le sous-optimal contrôle, on obtient un sous-estimateur

$$u_0^{LS} = \mathbb{E}[e^{-\int_t^T \hat{\lambda}_s^* ds} g(X_T^{t,x})] \leq u_0$$

Algorithm 2: Simulation Forward (1-BSDE)

Input: $M, N, \Phi, (\hat{\alpha}^{(n)})_{0 \leq n \leq N-1}$: nombre de simulation, nombre de discrétisation, espace de bases de régression, coefficients de régression

Output: Sous-estimateur de $u(t, x) = \sup_{\lambda_s \in [0, \beta]} \mathbb{E}[e^{-\int_t^T \lambda_s ds} g(X_T^{t,x})]$

```

1 for  $m$  from 1 to  $M$  do
2   for  $n$  from 0 to  $N - 1$  do
3      $\hat{Y}_{t_n}^m = \hat{\alpha}^{(n)} \cdot \phi^{(n)}(X_{t_n}^m)$ 
4      $\hat{\lambda}_{t_n}^m = \beta \mathbf{1}_{\{\hat{Y}_{t_n}^m < 0\}}$ 
5      $V_m = e^{-\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\lambda}_{t_n}^m} g(X_{t_N}^m)$ 
6 return  $u_0^{LS} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M V_m$ 

```

Résultat numérique

Pour la simulation numérique, on prend

$$\begin{aligned}
x &= 100 \\
\sigma &= 0.3 \\
\beta &= 0.05 \\
T - t &= 10 \\
g(x) &= x - K \\
K &= 90, 92, \dots, 110 \\
M_{Backward} &= 1000 \\
M_{Forward} &= 10^6 \\
N &= 10
\end{aligned}$$

Et on prend $\{1, x\}$ comme les bases de régression. Dans les deux Figures suivantes, on voit que u_0^{BSDE} fluctue autour de u_0^{HJB} (la référence); u_0^{LS} est toujours un peu au-dessous de u_0^{HJB} . C'est ce que l'on attend.

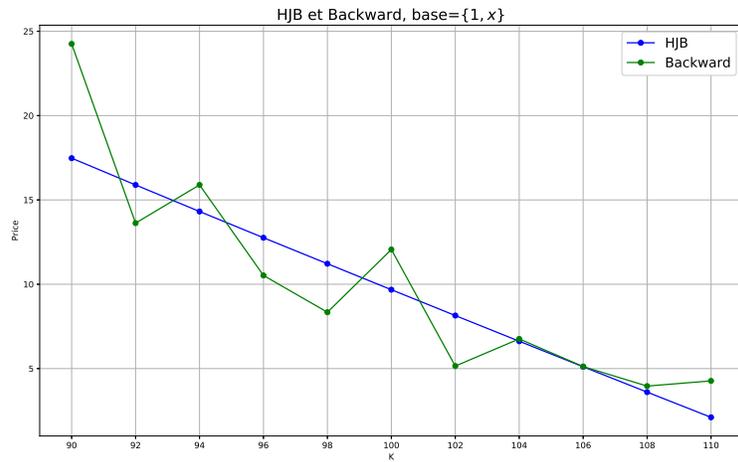


Figure 1: Pricer de HJB et de simulation Backward (base : $\{1, x\}$)

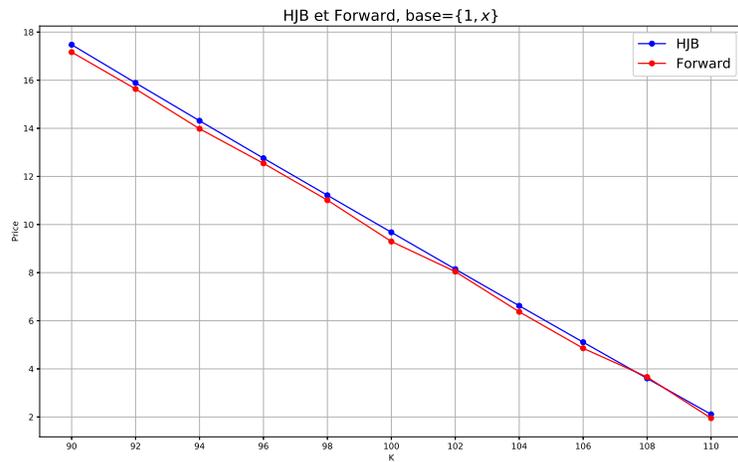


Figure 2: Pricer de HJB et de simulation Forward (base : $\{1, x\}$)

Table 1: Différents Pricers

K	u_0^{HJB}	u_0^{BSDE}	u_0^{LS}	95% IC de u_0^{LS}
90	17.48	24.25	17.17	[16.94, 17.39]
92	15.89	13.62	15.64	[15.41, 15.86]
94	14.31	15.89	13.98	[13.76, 14.20]
96	12.76	10.52	12.54	[12.32, 12.76]
98	11.22	8.34	11.01	[10.79, 11.23]
100	9.68	12.06	9.30	[9.08, 9.52]
102	8.14	5.15	8.04	[7.83, 8.26]
104	6.62	6.76	6.37	[6.16, 6.59]
106	5.11	5.12	4.86	[4.64, 5.07]
108	3.60	3.96	3.66	[3.44, 3.88]
110	2.11	4.27	1.95	[1.74, 2.17]

3.6.2 2-BSDE : modèle à la volatilité incertaine

Le deuxième exemple est le modèle à la volatilité incertaine, dans lequel la volatilité est dans un ensemble compact au lieu d'un constant.

Soit $(W_t^i)_{t \geq 0}, 1 \leq i \leq d$, d mouvements browniens corrélés et $(X_t^{\sigma, \rho})_{t \geq 0}, 1 \leq d$, d actifs qui satisfont

$$\begin{aligned} d(X_t^{\sigma, \rho})^i &= \sigma_t^i (X_t^{\sigma, \rho})^i dW_t^i \\ d \langle W^i, W^j \rangle_t &= \rho^{ij} dt \end{aligned}$$

ou la matrice de covariance ρ^{ij} signifie la corrélation entre différents mouvements browniens. Dans ce modèle, on connaît que la borne de volatilité et corrélation i.e

$$\begin{aligned} \sigma^i &\in [\underline{\sigma}^i, \overline{\sigma}^i], \quad 1 \leq i \leq d \\ \rho^{ij} &\in [-1, 1], \rho^{ii} = 1, \quad 1 \leq i, j \leq d \end{aligned}$$

On note l'espace admissible

$$\mathcal{A} = \left(\prod_{i=1}^2 [\underline{\sigma}^i, \overline{\sigma}^i] \right) \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} : \rho \in [-1, 1] \right\}$$

puis on veut obtenir le sur-réplication pricing.

$$u_t = \sup_{(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[g(X_T^{\sigma, \rho}) | \mathcal{F}_t]$$

Stratégie 1 : EDP et HJB La première stratégie est relier l'équation de HJB

de cette optimisation, qui est

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + H(x, D_x^2 u(t, x)) &= 0 \\ u(T, x) &= g(x) \\ H(x, D_x^2 u(t, x)) &= \frac{1}{2} \max_{(\sigma, \rho)_t \in \mathcal{A}} \sum_{i,j=1}^d \rho^{ij} \sigma^i \sigma^j x^i x^j D_{ij}^2 u(t, x) \end{aligned}$$

Stratégie 2 : 2-BSDE La deuxième stratégie associe cette optimisation avec 2-BSDE

$$\begin{aligned} dZ_t &= \Xi_t dt + \Gamma_t dX_t \\ dY_t &= -H(X_t, \Gamma_t) dt + Z_t dX_t + \frac{1}{2} (\sigma X_t)^T \Gamma_t (\sigma X_t) dt \end{aligned}$$

ou $Y_t = u(t, X_t)$, $Z_t = \partial_x u(t, X_t)$, $\Gamma_t = \partial_{xx}^2 u(t, X_t)$. Comme on a discuté dans les sous-sections précédentes; afin de le résoudre, on divise en trois parties.

- Implémenter le backward et obtenir la meilleure approximation pour Γ_t et Z_t dans l'espace de base Φ .
- Lancer un forward avec les coefficients obtenus et calculer le sous-estimateur u_0^{LS} .
- Utiliser la méthode duale pour le sur-estimateur u_0^{dual} en estimant la borne supérieure chemin par chemin.

On détaille chaque étape. Pour la suite, on suppose que ρ est constant mais σ est incertain dans notre modèle. On désigne $\Delta t = T/N$, $t_i = i\Delta t$, $\Delta W_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$, $i = 0, \dots, N$.

Pour l'étape de backward, initialement, on pose $\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma} + \sigma}{2}$ et simule \hat{X}_t . La formule de régression empirique s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{t_{i-1}}^l &= \mathbb{E}_{t_{i-1}} [\hat{Y}_{t_i} \hat{U}_{t_i}^l] (\hat{X}_{t_{i-1}}^l \hat{\sigma}_{t_{i-1}}^l)^{-1} \\ \hat{\Gamma}_{t_{i-1}}^{jl} &= \mathbb{E}_{t_{i-1}} [\hat{Z}_{t_i}^j \hat{U}_{t_i}^l] (\hat{X}_{t_{i-1}}^l \hat{\sigma}_{t_{i-1}}^l)^{-1} \\ \hat{U}_{t_i}^l &= \frac{1}{\Delta t} \sum_k (\rho)_{lk}^{-1} W_{t_i}^k \end{aligned}$$

ou $(\rho)_{lk}^{-1}$ signifie le terme lk de l'inverse de la matrice de covariance ρ . On trouve les coefficients de polynôme pour approcher Γ , Z à chaque instant après le traitement. Dans notre exemple, on choisit la base comme $\{1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2\}$.

On remarque que pour l'instant t_N , Z_{t_N} ne peut pas être réoccupé par la manière au-dessus, mais par $\frac{\partial u}{\partial x}(\hat{X}_{t_N})$.

Dans l'étape forward, on re-simule le mouvement brownien W_t , et pour chaque trajectoire et chaque instant t_i , on utilise les coefficients obtenus de calculer une

approximation Γ_t . Ensuite, ce Γ nous permet de calculer le contrôle σ par

$$\sigma = \arg \max_{\sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} \sum_{i,j=1}^d \rho^{ij} \sigma^i \sigma^j x^i x^j \Gamma^{ij}$$

et la trajectoire optimisée par σ réalise un sous-estimateur.

Finalement, grâce aux coefficients de régression de Z , on obtient une borne chemin par chemin

$$u_0^{dual} = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\max_{(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}^h} \left\{ g(X_{t_n}^{\sigma, \rho}) - \sum_{i=1}^n Z_{t_{i-1}} (X_{t_i}^{\sigma, \rho} - X_{t_{i-1}}^{\sigma, \rho}) \right\} \right]$$

On remarque ici σ n'est plus obtenu par l'optimisation de Hamilton comme dans la méthode de forward. En revanche, il vient de l'optimisation globale définie au-dessus.

On liste les algorithmes des trois étapes au-dessous.

Algorithm 3: Simulation Backward (2-BSDE) pour UVM

Input: M, N, Φ : nombre de simulation, nombre de discrétisation, espace de bases de régression

Output: coefficients $\{\hat{\alpha}_{t_n}, \hat{\beta}_{t_n}, 0 \leq n \leq N-1\}$

```

1 for  $m$  from 1 to  $M$  do
2   Simuler  $W_{t_n}^{(m)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ 
3   Simuler  $\hat{X}_{t_n}^{(m)}$  en utilisant  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma} + \underline{\sigma}}{2}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ 
4    $\hat{Y}_{t_N}^{(m)} = g(\hat{X}_{t_N}^{(m)})$ 
5 for  $n$  from  $N-1$  to 0 do
6   for  $l$  from 1 to  $d$  do
7      $\hat{U}_{t_n}^l = \frac{1}{\Delta t} \sum_k (\rho)^{-1} W_{t_n}^k$ 
8      $\hat{Z}_{t_{n-1}}^l = \mathbb{E}_{t_{n-1}}[\hat{Y}_{t_n} \hat{U}_{t_n}^l] (\hat{X}_{t_{n-1}}^l \hat{\sigma}_{t_{n-1}}^l)^{-1}$ 
9      $\hat{\alpha}_{t_{n-1}}^l :=$  coefficients de régression
10  for  $l, k$  from 1 to  $d$  do
11     $\hat{\Gamma}_{t_{n-1}}^{jl} = \mathbb{E}_{t_{n-1}}[\hat{Z}_{t_n}^j \hat{U}_{t_n}^l] (\hat{X}_{t_{n-1}}^l \hat{\sigma}_{t_{n-1}}^l)^{-1}$ 
12     $\hat{\beta}_{t_{n-1}}^{jl} :=$  coefficients de régression
13   $\hat{Y}_{t_{n-1}} =$ 
     $\mathbb{E}_{t_{n-1}}[\hat{Y}_{t_n}] + (H(\hat{X}_{t_{n-1}}, \hat{\Gamma}_{t_{n-1}}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \rho^{ij} \hat{\sigma}^i \hat{\sigma}^j \hat{X}_{t_{n-1}}^i \hat{X}_{t_{n-1}}^j \hat{\Gamma}_{t_{n-1}}^{ij}) \Delta t$ 
14 return  $(\hat{\alpha}_{t_n})_{0 \leq n \leq N-1}, (\hat{\beta}_{t_n})_{0 \leq n \leq N-1}$ 

```

Algorithm 4: Simulation Forward (2-BSDE) pour UVM

Input: $M, N, \Phi, (\hat{\beta}_{t_n})_{0 \leq n \leq N-1}$: nombre de simulation, nombre de discrétisation, espace de bases de régression, coefficients de régression

Output: Sous-estimateur de $u_0 = \sup_{(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[g(X_T^{\sigma, \rho})]$

```
1 for m from 1 to M do
2   for n from 0 to N - 1 do
3     Simuler  $W_{t_n}^{(m)}$ 
4     for l, k from 1 to d do
5        $\Gamma_{t_n}^{lk, (m)} = \hat{\beta}_{t_n}^{lk} \cdot \phi(X_{t_n}^{(m)})(X_{t_n}^{l, (m)})^{-1}$ 
6        $\sigma_{t_n}^{(m)} = \arg \max_{\sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} H(X_{t_n}^{l, (m)}, \Gamma_{t_n}^{(m)})$ 
7       for l from 1 to d do
8          $X_{t_{n+1}}^{l, (m)} = X_{t_n}^{l, (m)} e^{-(\sigma_{t_n}^{l, (m)})^2 \Delta t / 2 + \sigma(W_{t_{n+1}}^{l, (m)} - W_{t_n}^{l, (m)})}$ 
9 return  $u_0^{LS} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g(X_{t_N}^{(m)})$ 
```

Algorithm 5: Méthode duale pour UVM

Input: $M, N, \Phi, (\hat{\alpha}_{t_n})_{0 \leq n \leq N-1}$: nombre de simulation, nombre de discrétisation, espace de bases de régression, coefficients de régression

Output: Sur-estimateur de $u_0 = \sup_{(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[g(X_T^{\sigma, \rho})]$

```
1 for m from 1 to M do
2    $\sigma^{(*, m)} = \arg \max_{(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}^h} \left\{ g(X_{t_N}^{(m)}) - \sum_{n=1}^N Z_{t_{n-1}}^{(m)} (X_{t_n}^{(m)} - X_{t_{n-1}}^{(m)}) \right\}$ 
3   ( $Z^{(m)}$  dépend de  $\sigma$  implicitement, donc il demande une recherche globale)
4    $X^{(*, m)}, Z^{(*, m)} := \text{Simulation en } \sigma^{(*, m)}$ 
5    $V^{(m)} = g(X_{t_N}^{(*, m)}) - \sum_{n=1}^N Z_{t_{n-1}}^{(*, m)} (X_{t_n}^{(*, m)} - X_{t_{n-1}}^{(*, m)})$ 
6 return  $u_0^{dual} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M V^{(m)}$ 
```

Résultat numérique

En concernant le résultat numérique, on prend $d = 2, X_0 = 100, \underline{\sigma} = 0.1, \bar{\sigma} = 0.2, T = 1$. Pour la méthode backward, on lance $M_1 = 2^{13}$ trajectoires et on discrétise le temps en $N_1 = 4$ pas avec la base $\{1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2\}$. Pour la méthode forward, on re-simule M_1 mouvements browniens indépendamment et en $N_2 = 16$ pas. A cause du calculs lourds, on simule que $M_2 = 2^{10}$ trajectoires en $N_1 = 4$ pas. La fonction de payoff d'option outperformer spread est

$$(X_T^2 - 0.9X_T^1)^+ - (X_T^2 - 1.1X_T^1)^+$$

et on varie le corrélation $\rho = \{-0.1, -0.3, -0.5, -0.7, -0.9\}$. Ci-joint le résultat.

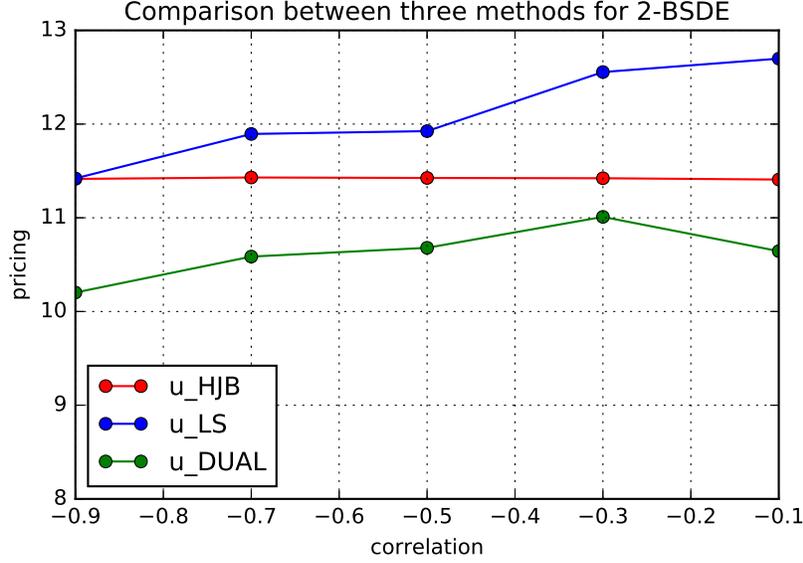


Table 2: Outperformer spread option pricers

ρ	u_0^{BSDE}	u_0^{LS}	u_0^{HJB}	u_0^{DUAL}	95% IC de u_0^{LS}	95% IC de u_0^{DUAL}
-0.100	9.362	10.644	11.408	12.698	[10.479, 10.809]	[12.140, 13.257]
-0.300	8.959	11.010	11.422	12.555	[10.844, 11.175]	[12.010, 13.100]
-0.500	8.843	10.679	11.425	11.925	[10.512, 10.847]	[11.371, 12.479]
-0.700	8.931	10.586	11.430	11.894	[10.421, 10.750]	[11.346, 12.443]
-0.900	8.968	10.202	11.415	11.420	[10.035, 10.369]	[10.874, 11.966]

4 Processus de branchement

Dans les section précédentes, on a introduit 1-BSDE et 2-BSDE. Ils fournissent une généralisation du théorème de Feynman-Kac pour les EDP non linéaires. Malheureusement, dans la pratique, la résolution numérique des BSDE nécessite le calcul des espérances conditionnelles, en utilisant généralement des méthodes de régression. Il est difficile de trouver des régresseurs de bonne qualité, notamment pour les portefeuilles multi-actifs. Ceci nous amène à introduire une nouvelle méthode basée sur des diffusions de branchement indiqué décrivant un arbre aléatoire Galton-Watson.

4.1 Processus de branchement

Les diffusions de branchements ont été introduites pour la première fois par McKean et Skorokhod pour donner une représentation probabiliste de la EDP

de Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (KPP) et plus généralement de EDP semi-linéaires du type

$$\partial_t u + \mathcal{L}u + \beta(t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k - u \right) = 0 \quad \text{sur } [0, T) \times \mathbb{R}^d \quad (4)$$

$$u(T, x) = g(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}^d \quad (5)$$

avec $\beta \geq 0$. Ici, la non-linéarité est une série de puissance dans u où les coefficients p_k doivent être non négatifs et sommer à un:

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, \quad 0 \leq p_k \leq 1$$

L'interprétation probabiliste d'une telle équation est la suivante.

- Laisser une seule particule commencer à l'origine, suivre une diffusion Itô sur \mathbb{R}^d , avec le générateur \mathcal{L} .
- Après un temps exponentiel $\beta(\cdot)$ moyen (indépendant de X) meurent et produisent k descendants avec probabilité p_k ($k = 0$ signifie que la particule meurt sans générer de descendant).
- Ensuite, les descendants effectuent des diffusions Itô indépendantes sur \mathbb{R}^d (avec le même générateur \mathcal{L}) à partir de leur lieux de naissance, meurent et produisent des descendants après un temps exponentiel $\beta(\cdot)$ moyen, etc.

Ce processus est appelé diffusion branchante d -dimensionnelle avec un taux de branchement $\beta(\cdot)$.

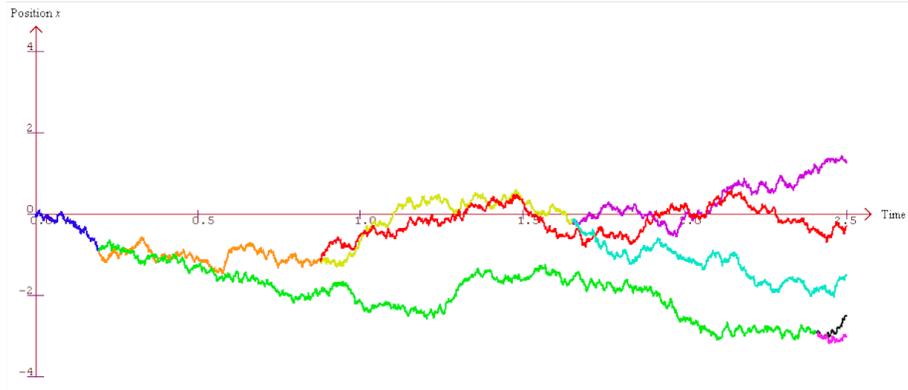


Figure 3: Processus de branchement

Remarque 1 ($\beta(\cdot)$ temps exponentiel) *Un temps exponentiel $\beta(\cdot)$ peut être généré comme la première fois à défaut τ d'un processus de Poisson*

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t \beta(s) ds \leq -\ln U \right\}$$

où U est une variable aléatoire uniforme dans $[0, 1]$. La probabilité de survie dans l'intervalle $[0, T]$ est $e^{-\int_0^T \beta(s) ds}$ et la probabilité de défaut dans $[t, t + dt]$ est $e^{-\int_0^t \beta(s) ds} \beta(t) dt$.

En particulier, si β est une constante, le temps exponentiel suit la loi $\text{Exp}(\beta)$.

Notons N_t le nombre de particules en vie à l'instant t et $(z_t^i)_{1 \leq i \leq N_t}$ leurs positions respectives. Définissons

$$\hat{u}(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\prod_{i=1}^{N_T} g(z_T^i) \right]$$

avec la convention $\prod_{i=1}^0 = 1$.

Théorème 2 *Supposons $\|g\|_\infty \leq 1$. Alors \hat{u} est une solution de viscosité à l'EDP semi-linéaire (4).*

4.2 Processus de branchement indiqué

Processus de branchement indiqué est une généralisation de processus de branchement.

Pour EDP

$$\partial_t u + \mathcal{L}u + \beta(t)(F(u) - u) = 0 \quad (6)$$

$$u(T, x) = g(x) \quad (7)$$

où $F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k$ une série de puissance en u avec rayon de convergence $R = 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Pour convenance, on écrit F comme

$$F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k p_k u^k$$

pour quelques probabilités p_k que nous laissons non précisées pour le moment. On a $p_k \neq 0$ et $\bar{a}_k = \frac{a_k}{p_k}$ pour $a_k \neq 0$, et on pose $p_k = 0$ et $\bar{a}_k = 0$ pour $a_k = 0$. On définit

$$\hat{u}(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\prod_{i=1}^{N_T} g(z_T^i) \prod_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k^{\Omega_k} \right]$$

où Ω_k = nombre de branchement de type k . \hat{u} est bien défini seulement si

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\prod_{i=1}^{N_T} g(z_T^i) \prod_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k^{\Omega_k} \right] < \infty$$

Théorème 3 *Supposons $\hat{u} \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ avec $\|\hat{u}\|_\infty < R$. Alors \hat{u} est une solution de viscosité à l'EDP (6).*

4.3 Exemples numériques

On prend un exemple simple de l'EDP semi-linéaire

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta (\pm u^2 - u) &= 0 \\ u(T, x) &= g(x)\end{aligned}$$

On a déjà la méthode de différences finies et la simulation Backward pour résoudre cet EDP numériquement. De plus, dans cette section, on obtient une autre numérique via les processus de branchement.

Pour la simulation, on prend $x_0 = 0$, $\sigma = 1$, $\beta = 0.05$, $g(x) = 1_{x>0}$.

Table 3: Résultats numériques en %

$F(u)$	u_0^{HJB}	u_0^{BSDE}	u_0^{branch}	95% IC de u_0^{branch}
u^2	42.16	43.88	42.24	[42.04, 42.24]
$-u^2$	23.64	24.93	23.81	[23.69, 23.93]

5 Conclusion

En conclusion, on a bien réussi notre objectif.

- On a étudié le problème du contrôle stochastique, et sa solution classique : la méthode des différences finies pour l'équation HJB associée.
- Dans ce projet, on a principalement étudié la présentation des BSDEs pour des équations EDPs (en particulier équation HJB). Le modèle à la volatilité incertaine demande le contrôle dans le terme de diffusion, qui nécessite 2-BSDE autre que 1-BSDE. Dans la simulation Backward, on a utilisé la technique de régression empirique. La méthode primale produit un sous-estimateur, et la méthode duale produit un sur-estimateur.
- A la fin, on a aussi étudié l'EDP semi-linéaire et sa solution numérique via des processus de branchement. On s'intéresse par ce problème parce que la solution des EDPs non-linéaires peuvent être approché par la solution des EDPs semi-linéaires.

References

- [E.13] Gobet E. *Méthodes de Monte-Carlo et processus stochastiques: du linéaire au non-linéaire*[M]. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2013.
- [G.05] Allaire G. *Analyse numérique et optimisation: Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*[M]. Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [GJ13] Henry-Labordère P. Guyon J. *Nonlinear option pricing*[M]. CRC Press, 2013.
- [H.07] Pham H. *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*[M]. Berlin: Springer, 2007.
- [HLLR16] Pierre Henry-Labordere, Christian Litterer, and Zhenjie Ren. A dual algorithm for stochastic control problems: Applications to uncertain volatility models and cva. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 7(1):159–182, 2016.
- [PP90] Etienne Pardoux and Shige Peng. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems & Control Letters*, 14(1):55–61, 1990.